

УДК 621.391, 621.396, 621.369

В. А. Пахотин, А. И. Бабинович, В. И. Строков

**МЕТОД МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ
В ПРИЛОЖЕНИИ К ЛЧМ-СИГНАЛАМ**

Представлена обработка сигналов с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ-сигналов) методом максимального правдоподобия. Получены основные выражения, определяющие оптимальный алгоритм обработки этих сигналов, а также выражения для дисперсии параметров ЛЧМ-сигналов (дисперсии Рао-Крамера). Приведены основные результаты модельных расчетов при приеме ЛЧМ-сигналов.

This article presents signal processing through linear frequency modulation (chirp signals) using the maximum likelihood method. The authors have obtained main expressions describing the optimal algorithm for processing these signals, as well as expressions for chirp signal dispersion (Rao-Cramér dispersion). The article presents key findings of model calculations during the reception of chirp signals.

Ключевые слова: сигналы с линейной частотной модуляцией, теория оптимального приема, метод максимального правдоподобия, цифровая обработка сигналов.

Key words: chirp signals, optimum reception theory, maximum likelihood method, digital processing of signals.



Введение

Метод максимального правдоподобия широко используется для цифровой обработки сигналов в радиотехнических комплексах аппаратуры [2–5]. Он позволяет получить структуру оптимального приемника и оценить дисперсию параметров сигнала на его выходе (дисперсию Рао-Крамера). Однако самой важной при применении метода максимального правдоподобия становится возможность получения более общего решения задачи разрешения подобных сигналов. Оно снимает рэлеевское ограничение на разрешающую способность. Разрешающая способность оказывается зависящей от отношения сигнал/шум и в пределе может быть бесконечно большой. В работах [3–7] метод максимального правдоподобия рассматривается в приложении к частотной спектроскопии, пеленгации ионосферных сигналов, разрешению точечных источников в оптических приборах, ЯМР-спектроскопии, радиолокации. В настоящей работе изложены вопросы, связанные с обработкой сигналов с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ-сигналов). Они относятся к классу сигналов с большой базой, отличаются высокой помехоустойчивостью и находят применение в разнообразных приложениях.

Основы теории

Запишем принятые сообщения $\hat{y}(t)$ в комплексном виде:

$$\hat{y}(t) = \begin{cases} \hat{U}_0 e^{i(\omega_0 + A(t-t_0))(t-t_0)}, & \text{если } t \in (t_0; t_0 + T); \\ \hat{U}_{ш}(t), & \text{если } t \notin (t_0; t_0 + T), \end{cases} \quad (1)$$

где $\hat{U}(t)$ – комплексная амплитуда ЛЧМ-сигнала; ω_0 – начальная круговая частота сигнала; $A = \frac{\omega_k - \omega_0}{T}$; ω_k – конечная круговая частота сигнала; T – длительность радиоимпульса; t_0 – время приема ЛЧМ-радиоимпульса; $\hat{U}_{ш}(t)$ – аддитивный стационарный шум, характеризующийся нормальным распределением, средним значением, равным нулю, дисперсией σ^2 и интервалом корреляции τ_k .

Для решения задачи оценки параметров ЛЧМ-сигнала запишем, следуя [1; 2], логарифм функции правдоподобия:

$$\ln(L(\tilde{\lambda}')) = -\frac{1}{2\sigma^2\tau_k} \int_{t_0}^{t_0+T} \left| \hat{y}(t) - \hat{U}'_0 e^{i(\omega'_0 + A(t-t'_0))(t-t'_0)} \right|^2 dt, \quad (2)$$

где $\tilde{\lambda}'$ – оценочный вектор параметров ЛЧМ-сигнала; штрихами отмечены оценочные параметры.



Дифференцируя выражение (2) по амплитуде \hat{U}'_0 и приравнявая дифференциал к нулю, можно получить уравнение правдоподобия, из которого следует решение

$$\hat{U}'_0(t'_0, \omega'_0) = \frac{1}{T} \int_{t'_0}^{t'_0+T} \hat{y}(t) e^{-i(\omega'_0 + A(t-t'_0))(t-t'_0)} dt. \quad (3)$$

Данное выражение определяет структуру оптимального приемника для ЛЧМ-сигнала. Математическое ожидание от решения $\hat{U}'_0(t'_0, \omega'_0)$ приводит к выражению

$$M\left(\hat{U}'_0(t'_0, \omega'_0)\right) = \frac{\hat{U}'_0}{T} e^{i\psi} \int_{t'_0}^{t'_0+T} e^{-i(\Omega - 2A\tau)} dt, \quad (4)$$

где $\psi = A\left(t_0^2 - (t_0 + \tau)^2\right) + \omega_0\tau + \Omega(t_0 + \tau)$, $\tau = t'_0 - t_0$, $\Omega = \omega'_0 - \omega_0$.

После интегрирования выражения (4) можно получить двумерную функцию корреляции, зависящую от Ω и τ :

$$\hat{R}(\Omega, \tau) = \hat{U}_0 e^{i\psi_1} \frac{\sin\left[\frac{(\Omega - 2A\tau)(T - \tau)}{2}\right]}{(\Omega - 2A\tau)(T - \tau)} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right), \quad (5)$$

где $\psi_1 = -A\tau(2t_0 - T) + \Omega\left(t_0 + \frac{\tau - T}{2}\right) + \omega_0\tau$.

Нормированная функция корреляции (5) является основной для классического решения задачи разрешения двух и более сигналов ЛЧМ. Она носит название функции неопределенности [1; 2]. Если сечения двух функций неопределенности на уровне 0,5 от максимума не перекрываются, тогда выполняется условие их ортогональности. В таком случае, используя принцип ортогональности, можно получить информацию о параметрах ЛЧМ-сигналов отдельно. По сути это рэлеевское ограничение на разрешающую способность оптимального приемника.

В сечении функции корреляции плоскостью $\tau = 0$, по существу, создается спектр радиоимпульса длительностью T и частотой ω_0 . В зависимости от длительности T полуширина спектральной линии $\Delta\omega$ изменяется $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Следовательно, разрешение по частоте двух ЛЧМ-сигналов не связано с девиацией частоты $\omega_k - \omega_0$, а зависит исключительно от длительности радиоимпульса.

В сечении функции корреляции плоскостью $\Omega = 0$ получим

$$\hat{R}(0, \tau) = \hat{U}_0 e^{i(\omega_0\tau - A\tau(2t_0 - T))} \frac{\sin[A\tau(T - \tau)]}{A\tau(T - \tau)} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right). \quad (6)$$



Полуширина корреляционной функции в этом случае определяется условием

$$A\tau(T - \tau) = \pi. \quad (7)$$

Выражение (7) является квадратным уравнением относительно τ и имеет два корня: $\tau_1 = T$ и $\tau_2 = \frac{2\pi}{AT}$.

Второй корень определяет полуширину корреляционной функции, зависящей от девиации $\omega_k - \omega_0$ частоты ЛЧМ-сигнала.

На рисунке 1 показан разрез модуля функции неопределенности плоскостью $t = 0$. На уровне 0,5 от максимума полуширина функции неопределенности будет $\Delta f = \frac{0,6}{T} \approx 7,5$ кГц. Рисунок 2 демонстрирует разрез модуля функции неопределенности плоскостью $\Omega = 0$. На уровне 0,5 от максимума полуширина функции неопределенности

равна $\Delta\tau = \frac{0,6}{f_k - f_H} \approx 0,006$ мс.

70

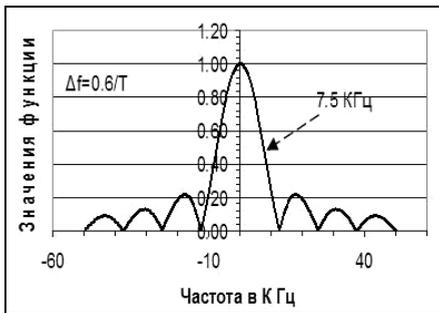


Рис. 1. Разрез функции неопределенности по частоте

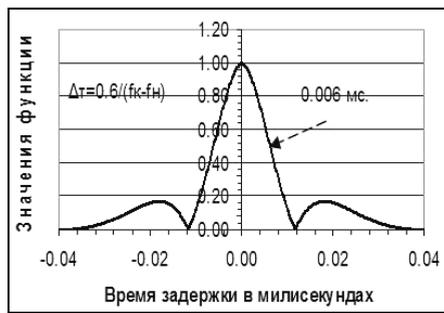


Рис. 2. Разрез функции неопределенности по времени задержки

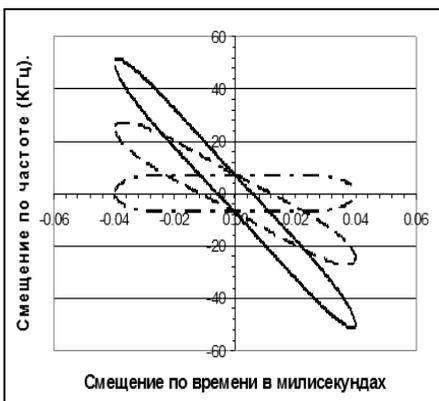


Рис. 3. Сечение функции неопределенности на уровне 0,5, $T = 80$ мкс

На рисунке 3 показаны срезы горизонтальной плоскостью на уровне 0,5 от максимума функции неопределенности при разных значениях девиации частоты $f_k - f_H = 0, 50, 100$ кГц. Длительность ЛЧМ-сигналов равна 80 мкс. Сечение имеет вид эллипсов, концы больших осей которых перемещаются вдоль двух вертикальных линий, образующихся при изменении девиации частоты. Образующие располагаются на расстоянии $\pm T/2$ (0,04 мс на рисунке 3). Пересечение линии эллипса с горизонтальной осью (τ) определяет ширину функции корреляции τ_2 .

с горизонтальной осью (τ) определяет ширину функции корреляции τ_2 .



Она уменьшается с увеличением девиации частоты. Однако имеется и другая возможность изменения эллипса в сечении функции неопределенности. Если фиксировать девиацию частоты и менять длительность ЛЧМ-сигнала (τ), тогда концы большой оси эллипса перемещаются по горизонтальной линии (образующей). Они определяют значение девиации частоты и находятся на расстоянии $\pm (f_k - f_n)$. В этом случае фиксируется точка пересечения линии эллипса с горизонтальной осью, которая обуславливает ширину корреляционной функции. Точка пересечения линии эллипса с вертикальной осью при этом будет определять ширину спектра радиоимпульса длительностью T и частотой ω_0 .

Таким образом, при увеличении T точность оценок частоты ЛЧМ-сигнала растет. При увеличении девиации частоты ($f_k - f_n$) повышается точность оценки времени приема ЛЧМ-сигнала. При одновременном увеличении девиации частоты и длительности ЛЧМ-сигнала растет точность оценок частоты и времени его приема. Другими словами, увеличивается эффективность использования ЛЧМ-сигналов, которые в связи с этим относятся к классу сигналов с большой базой. База B ЛЧМ-сигнала определяется произведением девиации частот ($f_k - f_n$) на длительность T :

$$B = T(f_k - f_n).$$

База обычного радиоимпульса не превышает единицы. Как следует из теории [1], объем тела неопределенности постоянен и не зависит от вида модуляции. Площадь сечения тела неопределенности на уровне 0,5 от максимума также является постоянной величиной. Следовательно, при увеличении временной базы ЛЧМ-сигнала T и одновременно частотной базы сигнала ($f_k - f_n$) эллипс вытягивается вдоль большой оси, в пределе стремясь к линии, проходящей через начало координат. Классическое разрешение в этом случае как по частоте, так и по времени приема будет бесконечно большим. Для обычного радиоимпульса, база которого не превышает единицы, эллипс сечения функции неопределенности на уровне 0,5 от максимума зависит лишь от одного параметра — длительности радиоимпульса T . В связи с этим, если T велико, то эллипс будет горизонтальным (большая ось) с малым разрешением по времени приема и хорошим разрешением по частоте $\Delta f = 1/T$. Если T мало, тогда эллипс будет вертикальным (большая ось) с хорошим разрешением по времени приема и плохим разрешением по частоте. При этом возникает проблема одновременного повышения точности оценок времени приема и частоты. ЛЧМ-сигналы лишены этого недостатка.

Оценка точности параметров ЛЧМ-сигнала

Положения теории оптимального приема дают возможность оценки точности параметров ЛЧМ-сигналов. С этой целью выводятся выражения для дисперсии параметров сигнала (дисперсия Рао-Крамера). Вначале определяются элементы информационной матрицы Фишера по формуле [1; 2]



$$\hat{J}_{is} = -M \left(\frac{d^2 \left(\ln \left(L(\bar{\lambda}') \right) \right)}{d\lambda_i d\lambda_s} \right), \quad (8)$$

где M – оператор математического ожидания; $L(\bar{\lambda}')$ – функция правдоподобия (выражение 2); $\bar{\lambda}'$ – вектор параметров сигнала, координаты которого определяются индексом i .

Если считать оценочными параметрами ЛЧМ-сигнала частоту ω'_0 и время приема t'_0 , тогда матрица Фишера определяется двойным дифференцированием логарифма функции правдоподобия по указанным параметрам в точке максимума корреляционной функции, где $\omega'_0 = \omega_0$ и $t'_0 = t_0$.

В результате информационная матрица Фишера размерностью 2 будет определена выражением

$$\hat{J} = \frac{|\hat{U}_0|^2}{\sigma^2 \tau_k} \begin{pmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{\omega_0 T^2}{2} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{AT}{3\omega_0} \right) \\ \frac{\omega_0 T^2}{2} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{AT}{3\omega_0} \right) & \omega_0 T^2 \left(1 + \frac{4}{3} \left(\frac{AT}{\omega_0} \right)^2 + 2 \frac{AT}{\omega} \right) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Диагональные элементы матрицы, обратной матрице Фишера, определяют дисперсии частоты D_{ω_0} и времени приема D_{t_0} :

$$D_{\omega_0} = \frac{9\sigma^2}{|\hat{U}_0|^2 NT^2} \left(1 + \left(\frac{\omega_k}{\omega_0} \right)^2 - \frac{5}{4} \frac{\omega_k}{\omega_0} \right); \quad (10)$$

$$D_{t_0} = \frac{4\sigma^2}{|\hat{U}_0|^2 N\omega_0^2},$$

где $N = \frac{T}{\tau_k}$ – количество некоррелированных по шуму отсчетов.

Аналогично, считая ω_0 и t_0 известными, получим выражения для дисперсий амплитуды D_{U_0} и дисперсии начальной фазы D_{φ_0} :

$$D_{U_0} = \frac{\sigma^2}{N}; \quad D_{\varphi_0} = \frac{\sigma^2}{U_0^2 N}. \quad (11)$$

Дисперсия амплитуды не зависит от значения последней и равна дисперсии шума σ^2 . Параметр N определяет уменьшение дисперсии



шума в результате обработки. Дисперсия начальной фазы обусловлена амплитудой сигнала и уменьшается с увеличением количества некоррелированных по шуму отсчетов.

Дисперсия частоты обратно пропорциональна T^2 , как и для обычного радиоимпульса, и повышается с увеличением отношения частот ω_k/ω_0 . Но если время приема ЛЧМ-сигнала известно, тогда выражение для дисперсии будет:

$$D_{\omega_0} = \frac{3\sigma^2}{|U_0^2| T^2 N}. \quad (12)$$

Оно не зависит от девиации частоты и определяется длительностью ЛЧМ-сигнала. Дисперсия времени приема D_{t_0} (выражение (3.3)) определяется начальной частотой ω_0 и не зависит от девиации частоты. Выражение для D_{t_0} аналогично подобному выражению для дисперсии обычного радиоимпульса. Данный вывод кажется странным в связи с тем, что ширина корреляционной функции зависит от девиации частоты. Однако в данном случае выражение (3.3) для дисперсии времени приема D_{t_0} обуславливает дисперсию Рао-Крамера. Она определяется радиоимпульсом сферичности в точке максимума функции корреляции и не зависит от ширины корреляционной функции. В практике локации дисперсия времени приема радиоимпульса оценивается по огибающей корреляционной функции. В этом случае выражение для дисперсии D'_{t_0} описывается формулой Вудворда:

$$D'_{t_0} = \frac{\sigma^2 \tau_k}{\beta^2 ES}, \quad (13)$$

где $ES = U^2 T$ – энергия ЛЧМ-сигнала; $\beta^2 = (\Delta f)^2 = (f_k - f_H)^2$; следовательно,

$$D'_{t_0} = \frac{\sigma^2}{|\hat{U}|^2 N (\omega_k - \omega_H)^2} = \frac{\sigma^2 \tau_2^2}{|\hat{U}|^2 N} \quad (14)$$

и дисперсия для времени приема ЛЧМ-сигнала по Вудворду (по огибающей) определяется квадратом полуширины корреляционной функции (τ_2^2).

Таким образом, дисперсия оценки времени приема ЛЧМ-сигнала по огибающей, определенная формулой Вудворда, дает большее значение, чем дисперсия, рассчитанная по формуле Рао-Крамера. Однако при оценке времени приема косинусной квадратурной составляющей необходимо знание начальной фазы.



Заключение

В настоящей работе на основе положений теории оптимального приема проведен анализ решения задачи оценки параметров ЛЧМ-сигналов, выведены выражения для оптимальной оценки их комплексной амплитуды. Приведены решения, определяющие оптимальные оценки частоты и времени приема ЛЧМ-сигнала. Они отличаются своеобразной весовой обработкой. Выведены выражения для дисперсий основных параметров ЛЧМ-сигнала: амплитуды, начальной фазы, начальной частоты, времени приема (дисперсии Рао-Крамера). Обсужден вопрос о дисперсии Рао-Крамера и дисперсии Вудворда при оценке времени приема ЛЧМ-сигнала.

Список литературы

1. Перов А.И. Статистическая теория радиотехнических систем : учебное пособие для вузов. М., 2003.
2. Пахотин В.А., Бессонов В.А., Молостова С.В., Власова К.В. Курс лекций для радиофизических специальностей. Калининград, 2008.
3. Пахотин В.А., Пахотина К.В., Жукова Н.В. Метод обработки данных, полученных при приеме ионосферных сигналов // Геомагнетизм и аэрномия. 2004. Т. 44, № 4. С. 511 – 517.
4. Пахотин В.А., Бессонов В.А., Иванова С.В. и др. Частотное разделение сигналов в области высокой корреляции несущих частот // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2005. Вып. 4. С. 124 – 131.

Об авторах

Валерий Анатольевич Пахотин – д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: VPakhotin@kantianf.ru

Александр Игоревич Бабинович – асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: VPakhotin@kantianf.ru

Виталий Игоревич Строков – асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: VPakhotin@kantianf.ru

About the authors

Prof. Valery Pakhotin, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: VPakhotin@kantiana.ru

Aleksandr Babinovich, PhD student, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: VPakhotin@kantiana.ru

Vitaly Stokov, PhD student, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: VPakhotin@kantianf.ru